ΑΣΚΗΣΕΙΣ Δ.Ε. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ | ΚΕΦ. 3º |

1) Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το $x_0=0$ για τη διαφορική εξίσωση:

$$2y'' + xy' + y = 0 \quad (E)$$

ΛΥΣΗ

Πρώτα ελέγχουμε εάν το $x_0=0$ είναι ομαλό σημείο

$a_0(x)=1$, $a_1(x)=x$, $a_2(x)=2\neq 0 \ (\Rightarrow a_2(0)=2\neq 0)$

Επίσης

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2}(x) &= \frac{x}{2} = 0\cdot x^0 + \frac{1}{2}\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + \dots \\ \frac{a_0}{a_2}(x) &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot x^0 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + \dots \end{aligned}\right\} \text{Αναλυτικές στο } x_0=0$$

Λίγο πιο αναλυτικά: $\frac{x}{2} = 0\cdot(x-0)^0 + \frac{1}{2}(x-0)^1 + 0\cdot(x-0)^2 + \dots$

$|x| < \infty$ → R_1: ακτίνα, R_2: ακτίνα

όμοια και το $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-0)^0 + 0\cdot(x-0)^1 + 0\,(x-0)^2 + \dots$

$R=\min\{R_1,R_2\}=\infty$. Επομένως το $x_0=0$ ομαλό σημείο.

Άρα, όλες οι λύσεις της (E) είναι της μορφής:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n\cdot x^{n-1} \Rightarrow y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\,c_n\cdot x^{n-2}$$

Αντικαθιστούμε στην (E) και έτσι, παίρνουμε:

$$0 = 2\cdot\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\,c_n\cdot x^{n-2} + x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n\cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,c_{n+2}\,x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,c_{n+2}\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\,c_n\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2(n+1)(n+2) c_{n+2} + n \cdot c_n + c_n \right] x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2(n+1)(n+2) c_{n+2} + c_n (n+1) \right] x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) \cdot \left(2(n+2) c_{n+2} + c_n \right) \right] x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 = 0 \quad \acute{\eta} \quad 2(n+2) c_{n+2} + c_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = -1 \quad \acute{\eta} \quad c_{n+2} = -\frac{c_n}{2(n+2)}, \quad \forall n \geq 0$$

Απορρίπτεται

Παρατηρούμε ότι ο αναδρομικός τύπος $c_{n+2} = -\frac{c_n}{2(n+2)}, n \geq 0$ έχει βήμα 2. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να τον διαχωρίσουμε σε 2 απλούστερους αναδρομικούς τύπους, εξαιρώντας δύο περιπτώσεις:

1η) $n = 2k$ και 2η) $n = 2k+1$

Ας ξεκινήσουμε για την Πρώτη:

$n = 2k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$$c_{2k+2} = -\frac{c_{2k}}{2(2k+2)} \Rightarrow c_{2(k+1)} = -\frac{c_{2k}}{4(k+1)}, \quad \forall k \geq 0$$

- Για $k=0$, έχουμε: $\cancel{c_2} = -\frac{c_0}{4}$
- Για $k=1$, έχουμε: $\cancel{c_4} = -\frac{\cancel{c_2}}{8}$
- Για $k=2$, έχουμε: $\cancel{c_6} = -\frac{\cancel{c_4}}{12}$

$\vdots$

- Για $k=k-1$ έχουμε: $c_{2k} = -\frac{\cancel{c_{2(k-1)}}}{4k}, \quad k-1 \geq 0 \Rightarrow k \geq 1$

Πολλ/ντας παίρνουμε:

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{(4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4k)} = \frac{(-1)^k \cdot c_0}{(4\cdot1)(4\cdot2)(4\cdot3)\dots(4\cdot k)} = \frac{(-1)^k c_0}{4^k \cdot k!}, \quad k \geq 1$$

Άρα,

$$c_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{c_0}{4^k \cdot k!}, \quad k \geq 1$$

2) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$y'' - 2(x-1)y' - 2y = 0 \quad (\epsilon)$

Ειδικά να βρεθεί η λύση y_0 αυτής η οποία πληροί τις αρχικές συνθήκες

$y_0(1) = 1$ και $y_0'(1) = 0$.

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε εάν το $x_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο

$a_0(x) = -2$, $a_1(x) = -2(x-1)$, $a_2(x) = 1 \neq 0$

$\frac{a_0}{a_2}(x) = \frac{-2}{1} = -2 = -2\cdot(x-1)^0 + 0\cdot(x-1)^1 + \cdots$

$\frac{a_1}{a_2}(x) = \frac{-2(x-1)}{1} = -2(x-1) = 0\cdot(x-1)^0 + (-2)\cdot(x-1)^1 + \cdots$

αναλυτικές στο $x_0 = 1$, $R_1 = R_2 = \infty$

$R = \min\{R_1, R_2\} = \infty$ Επομένως το $x_0 = 1$ ομαλό σημείο

Άρα, όλες οι λύσεις της (ϵ) δίνονται από:

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-1)^n$, για $x \in \mathbb{R}$

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n\cdot(x-1)^{n-1} \Rightarrow y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}$, για $x \in \mathbb{R}$

Αντικαθιστώντας στην (ϵ) έχουμε:

$(\epsilon): \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n\cdot(x-1)^{n-2} - 2(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n(x-1)^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\cdot c_{n+2}\cdot(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-2n)c_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)c_n\cdot(x-1)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-2n)\cdot c_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)c_n(x-1)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n - 2c_n\right)(x-1)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left[(n+2)c_{n+2} - 2c_n\right](x-1)^n = 0$$

$n+1 = 0$ ή $(n+2)c_{n+2} - 2c_n = 0$

$n = -1$ ή $c_{n+2} = \frac{2c_n}{n+2}$, $n \geq 0$

Απορ.

Για τη δευτερη σειρα:

$n = 2k+1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{2}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ άρα $k \geq 0$.

$$C_{2k+3} = -\frac{C_{2k+1}}{2(2k+3)}, \quad \forall k \geq 0$$

- Για $k=0$, έχουμε: $\cancel{C_3} = -\frac{C_1}{6}$
- Για $k=1$, έχουμε: $\cancel{C_5} = -\frac{\cancel{C_3}}{10}$
- Για $k=2$, έχουμε: $\cancel{C_7} = -\frac{\cancel{C_5}}{14}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

- Για $k=k-1$, έχουμε: $C_{2k+1} = -\frac{C_{2k-1}}{2\cdot(2k+1)}$, $\quad k-1 \geq 0 \Rightarrow k \geq 1$

Πολλ/ζοντας παίρνουμε:

$$C_{2k+1} = (-1)^k \cdot \frac{C_1}{6\cdot 10\cdot 14 \dots 2(2k+1)} = (-1)^k \cdot \frac{C_1}{(2\cdot 3)(2\cdot 5)(2\cdot 7)\dots 2(2k+1)} =$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{C_1}{2^k\cdot(3\cdot 5\cdot 7\dots(2k+1))}, \quad k \geq 1$$

Ουσιαστικά σπάσαμε τον αρχικό αναδρομικό τυπο σε 2 (ανεξαρτητους) αναδρομικους τύπους (αρτιων & περιττων)

Για καθε $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n =$$

$$= C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}\cdot x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k+1}\cdot x^{2k+1} =$$

$$= C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{C_0}{4^k \cdot k!} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{C_1}{2^k \cdot (3\cdot 5\cdot 7\dots(2k+1))} x^{2k+1} =$$

$$= C_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4^k \cdot k!} x^{2k} \right) + C_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2^k\cdot(3\cdot 5\cdot 7\dots(2k+1))} x^{2k+1} \right)$$

όμοιως με την άσκηση (1) παίρνουμε:
τις δύο δυνατές περιπτώσεις που αντιστοιχούν στο βήμα
$1^{ον}$) $m=2k\geq 0 \Rightarrow k\geq 0$

$$C_{2(k+1)} = \frac{\cancel{2}\cdot C_{2k}}{\cancel{2}(k+1)}, \quad k\geq 0 \Rightarrow C_{2(k+1)} = \frac{C_{2k}}{k+1}, \quad k\geq 0$$

- Για $k=0$, τότε $\cancel{C_2} = \frac{C_0}{1}$
- Για $k=1$, τότε $\cancel{C_4} = \frac{\cancel{C_2}}{2}$
- Για $k=2$, τότε $\cancel{C_6} = \frac{\cancel{C_4}}{3}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- Για $k=k-1$, τότε $C_{2k} = \frac{\cancel{C_{2(k-1)}}}{k}$, $k-1\geq 0 \Rightarrow k\geq 1$

Πολ/ζοντας παίρνουμε:

Αφού $y_0(1)=1$

$$C_{2k} = \frac{C_0}{k!} = \frac{1}{k!}, \quad k\geq 1$$

$2^{ον}$) $m=2k+1\geq 0 \Rightarrow k\geq -\frac{1}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$ άρα $k\geq 0$

$$C_{2k+3} = \frac{2C_{2k+1}}{2k+3}, \quad k\geq 0$$

Αφού $y_0'(1)=0$

- Για $k=0$, τότε $C_3 = \frac{2\cdot C_1}{3} = \frac{2\cdot 0}{3} = 0$
- Για $k=1$, τότε $C_5 = \frac{2\cdot C_3}{5} = \frac{2\cdot 0}{5} = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- Για $k=k-1$, τότε $C_{2k+1} = \frac{2\cdot C_{2k-1}}{2k+1} = 0$, $k-1\geq 0 \Rightarrow k\geq 1$

Πολ/ζοντας παίρνουμε

$C_{2k+1} = 0, \quad \forall k\geq 1$

Έτσι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$y(x) = C_0 + \cancel{C_1\cdot x}^{\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}(x-1)^{2k} + \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k+1}\cdot(x-1)^{2k+1}}^{\,0} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}(x-1)^{2k}$$

3) Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο λύσεων της Δ.Ε Β' τάξης $(1-x^2)y''-xy'+\rho^2 \cdot y=0$, $-1<x<1$ όπου ρ μια μη αρνητική πραγματική σταθερά.

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να εξεταστούν όλα τα σημεία $x_0 \in \mathbb{R}-\{-1,1\}$ ως προς την ομαλότητά τους.

$a_2(x)=(1-x^2)=(1-x)(1+x)$, $a_1(x)=-x$, $a_0(x)=\rho^2$, $\rho \geq 0$

$(a_2(x_0)=(1-x_0)(1+x_0)\neq 0 \Rightarrow x_0 \neq \pm 1)$

Αναπτύγματα:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}=\dfrac{-x}{1-x^2}=-x\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)x^{2n+1}, & |x|<1, \ R_1=1 \\ \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}=\dfrac{\rho^2}{1-x^2}=\rho^2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^2\cdot x^{2n}, & |x|<1, \ R_2=1 \end{cases}$$

Άρα, όλα τα $x_0 \in \mathbb{R}\{-1,1\}$ είναι ομαλά σημεία της (Ε)

Έστω, $x_0=0$ (γιατί μας βολεύει επειδή $|x|<1$ και οι $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}$ είναι αναλυτικές γύρω από το 0)

καθώς $R=\min\{R_1,R_2\}=1$

$y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n \cdot x^n$, για $|x|<1$

Παραγωγίζουμε και αντικαθιστούμε στην αρχική μας Δ.Ε:

$y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot c_n \cdot x^{n-1}$ και $y''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)\cdot c_n \cdot x^{n-2}$

Έτσι,

$$(1-x^2)\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}-x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot c_n\cdot x^{n-1}+\rho^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)c_n\cdot x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)c_n\cdot x^n-\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot c_n\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\rho^2\cdot c_n\cdot x^n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)c_n x^n-\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot c_n\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\rho^2\cdot c_n\cdot x^n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot(n-1)c_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot c_n\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\rho^2\cdot c_n\cdot x^n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}-n(n-1)c_n-n\cdot c_n+\rho^2\cdot c_n\right]x^n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}-(n^2-\rho^2)c_n\right]x^n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2)C_{n+2} = (n^2-p^2)C_n \Rightarrow C_{n+2} = \frac{(n^2-p^2)}{(n+1)(n+2)}C_n,\ n\geq 0$$

Εχουμε για μια αναδρομική σχέση βήματος 2

Έτσι, έχουμε:

$1^{ον})$ $n=2k\geq 0 \Rightarrow k\geq 0$

$$C_{2k+2} = \frac{2^2k^2-p^2}{(2k+1)(2k+2)}C_{2k},\ k\geq 0$$

• Για $k=0$, τότε $C_2 = -\frac{p^2}{1\cdot 2}C_0$ $(4\cdot 0^2-p^2)$

• Για $k=1$, τότε $C_4 = \frac{4-p^2}{3\cdot 4}C_2$ $(4\cdot 1^2-p^2)$

• Για $k=2$, τότε $C_6 = \frac{16-p^2}{5\cdot 6}C_4$ $(4\cdot 2^2-p^2)$

⋮

• Για $k=k-1$, τότε $C_{2k} = \frac{2(k-1)^2-p^2}{(2k-1)(2k)}C_{2k-2}$ $\quad k-1\geq 0 \Rightarrow k\geq 1$

Πολ/ζοντας παίρνουμε:

$$C_{2k} = \frac{(-p^2)\cdot(4-p^2)(16-p^2)\ldots(4(k-1)^2-p^2)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots(2k-1)\,2k)}C_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{2k} = \frac{(-p^2)\cdot(4-p^2)(16-p^2)\ldots(4(k-1)^2-p^2)}{(1\cdot 2)(3\cdot 4)(5\cdot 6)\ldots(2k-1)\,2k}C_0 =$$

$$= \frac{(-p^2)(4-p^2)(16-p^2)\ldots(4(k-1)^2-p^2)}{2^k\cdot(1\cdot 2\cdot 3\ldots k)\cdot(1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1))}C_0 =$$

$$= \frac{(-p^2)(4-p^2)(16-p^2)\ldots(4(k-1)^2-p^2)}{2^k\cdot k!\,(1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1))}\cdot C_0,\quad k\geq 1$$

$2^{ον})$ $n=2k+1\geq 0 \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} k\geq 0$

$$C_{2k+3} = \frac{((2k+1)^2-p^2)}{(2k+2)(2k+3)}C_{2k+1},\quad k\geq 0.$$

• Για $k=0$, τότε $c_3 = \frac{1-p^2}{2\cdot 3}\cdot c_1$

• Για $k=1$, τότε $c_5 = \frac{9-p^2}{4\cdot 5}\cdot c_3$

• Για $k=2$, τότε $c_7 = \frac{25-p^2}{6\cdot 7}\cdot c_5$

⋮

• Για $k=k-1$ τότε $c_{2k+1} = \frac{((2k-1)^2-p^2)}{(2k)\cdot(2k+1)}\, c_{2k-1}$, $k-1\geq 0 \Rightarrow k\geq 1$

Πολ/ζοντας παίρνουμε:

$$c_{2k+1} = \frac{(1-p^2)(9-p^2)(25-p^2)\cdots((2k-1)^2-p^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdots(2k)(2k+1)}\, c_1 =$$

$$= \frac{(1-p^2)(9-p^2)(25-p^2)\cdots((2k-1)^2-p^2)}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k))(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1))}\, c_1 =$$

$$= \frac{(1-p^2)(9-p^2)(25-p^2)\cdots((2k-1)^2-p^2)}{2^k\cdot k!\,(3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1))}\, c_1 \quad , \; k\geq 1$$

Για κάθε $|x|<1$:

$$y(x) = c_0 + c_1\cdot x + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\, x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1}\cdot x^{2k+1} =$$

$$= c_0 + c_1\cdot x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-p^2)(4-p^2)\cdots(4(k-1)^2-p^2)}{2^k\, k!\,(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1))}\, c_0\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(1-p^2)(9-p^2)\cdots((2k-1)^2-p^2)}{2^k\cdot k!\,(3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1))}\, c_1\right)$$

$$= c_0\underbrace{\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-p^2)(4-p^2)\cdots(4(k-1)^2-p^2)}{2^k\cdot k!\,(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1))}\right)}_{y_1(x)} + c_1\underbrace{\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-p^2)\cdots((2k-1)^2-p^2)}{2^k\cdot k!\,(3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1))}\right)}_{y_2(x)}$$

Άρα, ένα
ΒΣΛ για την (Ε) είναι το $\{y_1(x), y_2(x)\}$

4) Δίνεται η διαφορική εξίσωση

(E) $xy'' + xy' + 2y = 0$

i) ΝΔΟ το $x_0=0$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο και ότι οι ρίζες της ενδεικτικής εξίσωσης είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 0$

ii) Να βρεθεί μια λύση y_1 στο $(0,+\infty)$ της μορφής
$$y_1(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n, \quad x>0$$

iii) Να βρεθεί μια λύση y_2 στο $(0,+\infty)$ γραμμικά ανεξάρτητη με την y_1, με χρήση της μεθόδου υποβιβασμού τάξης της διαφορικής εξίσωσης

ΛΥΣΗ

i) Εξετάζουμε ως προς την ομαλότητα του $x_0=0$

$a_2(x) = x \Rightarrow a_2(x_0) = 0 \Rightarrow$ Το $x_0=0$ ανώμαλο

Έπειτα, εξετάζουμε ως προς την κανονικότητα του $x_0=0$

$$A_1(x) = \frac{a_1}{a_2}(x)(x-x_0) = \frac{x}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} = x$$

$$A_2(x) = \frac{a_0}{a_2}(x)(x-x_0)^2 = \frac{2}{\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{2}} = 2x$$

} Αναλυτικές στο $x_0=0$, $R_1 = R_2 = +\infty$

Άρα, το $x_0=0$ ανώμαλο (κανονικό) σημείο

Έτσι, η ενδεικτική εξίσωση θα είναι

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ και } \lambda_2 = 0 \quad (\lambda_1 > \lambda_2)$$

ii) Η λύση y_1 θα είναι της μορφής:

$$y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n, \quad 0<|x-x_0|<R=\min\{R_1,R_2\}=+\infty$$

και πρώτο όρο της c_n τον: $c_0 = 1$

Άρα,

$$y_1(x) = |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n, \ \forall x>0 \Rightarrow y_1(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n, \ x>0$$

$$\Rightarrow y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^{n+1}, \ x>0$$

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_n \cdot x^n \Rightarrow y_1''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n+1) c_n \cdot x^{n-1}$$

Αντικαθιστώντας στην (E) έχουμε:

$$x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(n+1)c_n\cdot x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n\cdot x^{n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n\cdot x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n\cdot x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+1}\cdot x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n\cdot x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n\cdot x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+1} + (n+1)c_n + 2c_n\right]x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+1} + (n+3)c_n\right]x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2)c_{n+1} + (n+3)c_n = 0 \Rightarrow \boxed{c_{n+1} = -\frac{(n+3)}{(n+1)(n+2)}c_n,\ n\geq 0}$$

Έχουμε βήμα ίσο με 1 (τηλεσκοπική περίπτωση)

- Για $n=0$, $\cancel{c_1} = (-1)\cdot\frac{3}{1\cdot 2}c_0$
- Για $n=1$, $\cancel{c_2} = (-1)\cdot\frac{4}{2\cdot 3}\cancel{c_1}$
- Για $n=2$, $c_3 = (-1)\cdot\frac{5}{3\cdot 4}\cancel{c_2}$

$\vdots$

- Για $n=n-1$, $c_n = (-1)\cdot\frac{(n+2)}{n\cdot(n+1)}\cancel{c_{n-1}}$, $n-1\geq 0 \Rightarrow n\geq 1$

Πολ/ζοντας παίρνουμε:

$$c_n = (-1)^n\cdot\frac{(3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+2))}{(1\cdot 2)(2\cdot 3)(3\cdot 4)\cdots(n(n+1))}\overset{=1}{c_0} = (-1)^n\frac{n+2}{2n!},\ n\geq 1$$

Επομένως,

$$y_1(x) = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^n = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{2n!}x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{2(n-1)!}x^n,\ \text{για } x>0.$$

iii) Θέτουμε $y=y_1\cdot z \Rightarrow y'=y_1'z+y_1z' \Rightarrow y''=y_1''z+2y_1'z'+y_1z''$

Αντικαθιστούμε στην (ε) και παίρνουμε την απλούστερη εξίσωση:

$$y_1z''+(2y_1'+y_1)z'=0$$

όπου θέτοντας $z'=u$ έχουμε:

$$y_1u'+(2y_1'+y_1)u=0$$

και έτσι αφού είναι ομογενής γραμμ. διαφ. εξ. α' τάξης

$$u_1(x)=e^{-\int \frac{2y_1'(x)+y_1(x)}{y_1(x)}dx}=\frac{e^{-x}}{y_1^2(x)},\ x>0$$

Άρα, αφού $z'=u \Rightarrow z=\int \frac{e^{-x}}{y_1^2(x)}dx,\ x>0$

Επομένως, λόγω ότι $y=y_1z \Rightarrow$

$$\Rightarrow y=y_1(x)\cdot\int \frac{e^{-x}}{y_1^2(x)}dx,\ x>0$$

$$W(y_1,y_2)(x)=\det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_1(x)\int \frac{e^{-x}}{y_2^2(x)}dx \\ y_1'(x) & y_1'(x)\cdot\int \frac{e^{-x}}{y_2^2(x)}dx+\frac{e^{-x}}{y_1(x)} \end{pmatrix}=e^{-x}\neq 0$$

Άρα, οι y_1 και y_2 γραμμικά ανεξάρτητες

5) Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Δ.Ε του Hermite τάξης ρ:

$$y'' - 2xy' + 2\rho y = 0 \quad \text{με } \rho = \sigma\tau\alpha\theta$$

Ως εφαρμογή να λυθεί το παρακάτω Π.Α.Τ.

$$y'' - 2xy' + 8y = 0 \ ; \quad y(0) = y'(0) = 1$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε, $a_0(x) = 2\rho$, $a_1(x) = -2x$ και $a_2(x) = 1 \neq 0$ συνεχείς: $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1(x)}{a_2(x)} &= \frac{-2x}{1} = -2x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R_1 = \infty \\ \frac{a_0(x)}{a_2(x)} &= \frac{2\rho}{1} = 2\rho = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R_2 = \infty \end{aligned}\right\} \text{Αναλυτικές στο } \mathbb{R}$$

Άρα, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1} \quad \text{και} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n \cdot x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) c_n \cdot x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1} + 2\rho \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} \cdot x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \cdot x^n + 2\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} - 2n c_n + 2\rho c_n \right] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_{n+2} = \frac{2 \cdot (n-\rho) c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0$$

Λαμβάνοντας τις περιπτώσεις $n = 2k$ και $n = 2k+1$, $n \geq 0$ έχουμε:

1η) $n = 2k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$$c_{2(k+1)} = \frac{2(2k-\rho) c_{2k}}{(2k+2)(2k+1)}, \quad k \geq 0$$

- Για $k=0$, τότε $c_2 = \dfrac{-2\rho \cdot c_0}{2 \cdot 1}$, • Για $k=2$, $c_6 = \dfrac{(8-2\rho) c_4}{6 \cdot 5}$
- Για $k=1$, τότε $c_4 = \dfrac{(4-2\rho) c_2}{4 \cdot 3}$ • Για $k = k-1$, $c_{2k} = \dfrac{(2 \cdot (2k-2) - 2\rho) c_{2k-2}}{2k(2k-1)}$, $k \geq 1$

2^{η}) $n=2k+1 \geq 0 \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k \geq 0$

$$C_{2k+3} = \frac{2((2k+1)-\rho)\, C_{2k+1}}{(2k+2)(2k+3)} \quad , \ k \geq 0$$

- Για $k=0$, τότε: $C_3 = \dfrac{2(1-\rho)\cdot C_1}{2\cdot 3}$
- Για $k=1$, τότε: $C_5 = \dfrac{2\cdot(3-\rho)\cdot C_3}{4\cdot 5}$
- Για $k=2$, τότε: $C_7 = \dfrac{2(5-\rho)\, C_5}{6\cdot 7}$

$\vdots$

- Για $k=k-1$, τότε: $C_{2k+1} = \dfrac{2\cdot((2k-1)-\rho)\, C_{2k-1}}{2k\cdot(2k+1)}$, $k \geq 1$

▷ για την (1^{η}) πολλ/ζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$C_{2k} = \frac{(-2\rho)(4-2\rho)(8-2\rho)\cdots(2(2k-2)-2\rho)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(2k-1)(2k)}\, C_0 =$$

$$= \frac{\cancel{2^k}(-\rho)(2-\rho)(4-\rho)\cdots((2k-2)-\rho)}{\cancel{2^k}(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1))}\, C_0 =$$

$$= \frac{(-\rho)(2-\rho)(4-\rho)\cdots((2k-2)-\rho)}{k!\,(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1))}\, C_0 \ , \ \forall k \geq 1$$

▷ για την (2^{η}) πολλ/ζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$C_{2k+1} = \frac{2^k\cdot(1-\rho)(3-\rho)(5-\rho)\cdots((2k-1)-\rho)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdots(2k)(2k+1)}\, C_1 =$$

$$= \frac{\cancel{2^k}(1-\rho)(3-\rho)(5-\rho)\cdots((2k-1)-\rho)}{\cancel{2^k}\, k!\,(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1))}\, C_1 =$$

$$= \frac{(1-\rho)(3-\rho)(5-\rho)\cdots((2k-1)-\rho)}{k!\,(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1))}\, C_1 \ , \ k \geq 1$$

Άρα, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} =$

$$= c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-p)(2-p)\cdots[(2k-2)-p]}{k!\,(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1))} \right) + c_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)(3-p)\cdots[(2k-1)-p]}{k!\,(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1))} \right)$$

Για την δοθείσα εφαρμογή

$c_0 = 1$ και $c_1 = 1$

Άρα,

$$y(x) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)(2-4)\cdots((2k-2)-4)}{k!\,(1\cdot 3\cdots(2k-1))} \right) + \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-4)(3-4)\cdots[(2k-1)-4]}{k!\,(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1))} \right)$$